1 Obertonreihe

„Die Zahl ist das Wesen aller Dinge.“[1]

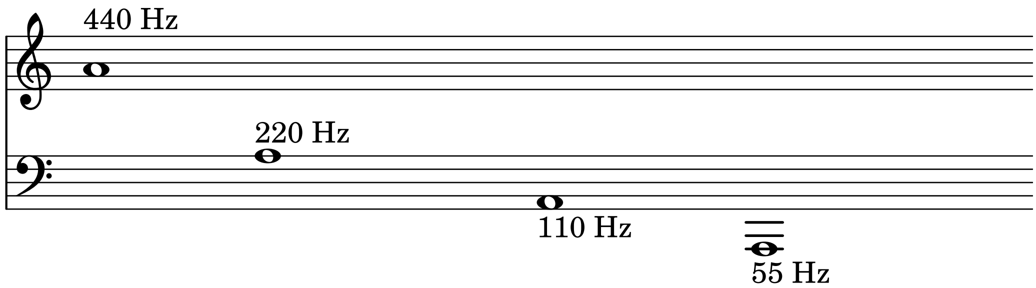
Pythagoras

Der Kammerton

Grundlegend für folgende Betrachtungen ist die „Eichung“ unseres Tonsystems mit dem *Kammerton*[2] a^1 = 440 Hz[3].

Das Gesetz der Oktave

Wird unser Kammerton a^1= 440 Hz nach unten oktaviert, schwingt ein kleines a mit 220 Hz. Ein weiteres Mal oktaviert ein großes A mit 110Hz und noch einmal oktaviert ein Kontra A mit 55 Hz. Da der Hörbereich des Menschen 16 Hz – ca. 20 000 Hz umfasst, könnten wir noch ein Subkontra A mit 27,5 Hz hören.



[1] Pythagoras von Samos um 570 vor Chr. – um 510 vor Chr.
[2] seit 1939 gültige Norm
[3] Abkürzung für Hertz = Einheit für die Anzahl der Schwingungen pro Sekunde benannt nach dem Deutschen Physiker Heinrich Hertz

Obertongesetze

Die Frequenzen der Obertöne sind ganzzahlige vielfache Frequenzen der Frequenz des Grundtons.

Wenn wir nun ein Kontra A mit 55 Hz als Grundton einer Obertonreihe annehmen, erhalten wir bis zum 15. Oberton (oder anders formuliert bis zum 16. Teilton) untenstehende Frequenzen:

FVh:	1 :	2 :	3 :	4 :	5 :	6 :	7 :	8 :	9 :	10 :	11 :	12 :	13 :	14 :	15 :	16
Hz:	55	110	165	220	275	330	385	440	495	550	605	660	715	770	825	880

FVh . . . Frequenzverhältnisse

Unser 12-stufiges Tonsystem

Erst im 19. Jahrhundert setzte sich bei uns die *gleichstufige Stimmung*[1] von Tasteninstrumenten durch.[2] Diese Berechnung stellte sich als (genialer ?) Kompromiss heraus. Es lässt einerseits auch ein Tasteninstrument durch sämtliche Tonarten schreiten – andererseits mit dem Nachteil, dass nur die Oktave, als einziges Intervall so intoniert[3] ist, wie es von der Natur in der Obertonreihe am *schwebungsfreiesten* vorgesehen wäre. Alle anderen Intervalle weichen mehr oder weniger von der idealen natürlichen „Vorlage“ ab.
Zusammenklänge von Tönen – also Akkorde oder Dreiklänge – sind in sämtlichen Konstellationen ein Kompromiss – mit dem Vorteil, dass die Tonbeziehungen wenn sie transponiert werden immer die gleichen bleiben.

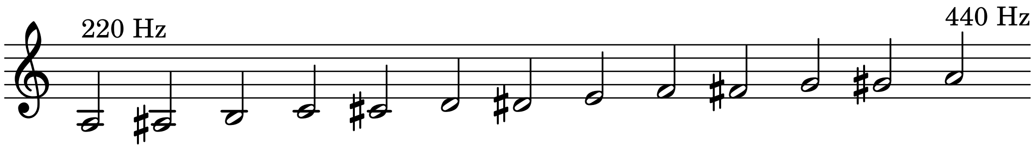
Von den Ton-Frequenz-Berechnern war also ein Frequenz-Faktor gesucht, der

[1] gleichbedeutend wäre auch: *gleichstufig temperierte Stimmung* oder auch *gleichschwebend temperierte Stimmung*
[2] Erste Aufzeichnungen dieser Einteilung der musikalischen Oktave sind schon seit 1584 bekannt
[3] im Sinne von Intervall-Reinheit

zwölf mal mit sich selber multipliziert **zwei** ergibt. Die Lösung war und ist:

$$\sqrt[12]{2}$$

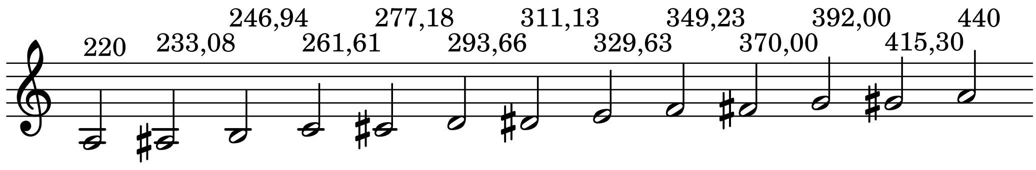
Wenn wir nun ein a dessen Frequenz wir kennen mit dem Faktor $\sqrt[12]{2}$ multiplizieren, gelangen wir zum ais – das ais wieder mit $\sqrt[12]{2}$ multipliziert, gelangen wir zum h und so weiter bis wir nach dem zwölften Mal bei der Oktave vom ausgehenden a „landen“. Auch dabei ist es hilfreich, wenn wir uns die Oktave als *Frequenzhalbierend* oder wenn nach oben oktaviert, als *Frequenzverdoppelnd* vorstellen.



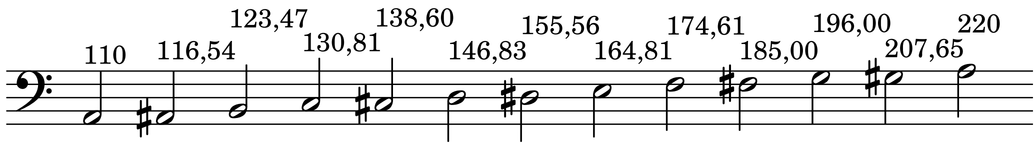
Nachfolgend diese Berechnung vom kleinen a bis zum eingestrichenen a:

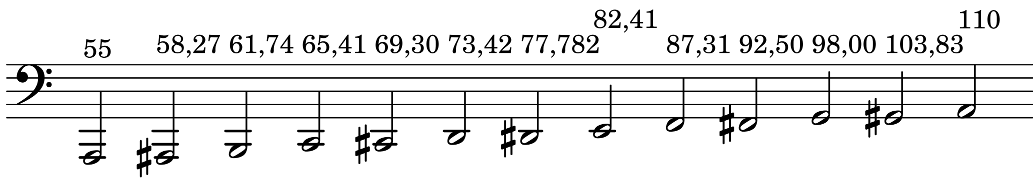
$$
\begin{array}{llllllllllllll}
 & & (\sqrt[12]{2})^0 & = & 2^{\frac{0}{12}} & = & 1 & => & 220\text{Hz} & \times & 1 & = & 220 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{a} \\
\sqrt[12]{2} & = & (\sqrt[12]{2})^1 & = & 2^{\frac{1}{12}} & = & 1{,}059 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}059 & = & 233{,}08 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{ais} \\
 & & (\sqrt[12]{2})^2 & = & 2^{\frac{2}{12}} & = & 1{,}122 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}122 & = & 246{,}94 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{h} \\
 & & (\sqrt[12]{2})^3 & = & 2^{\frac{3}{12}} & = & 1{,}189 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}189 & = & 261{,}63 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{c}^1 \\
 & & (\sqrt[12]{2})^4 & = & 2^{\frac{4}{12}} & = & 1{,}260 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}260 & = & 277{,}18 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{cis}^1 \\
 & & (\sqrt[12]{2})^5 & = & 2^{\frac{5}{12}} & = & 1{,}335 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}335 & = & 293{,}66 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{d}^1 \\
\sqrt{2} & = & (\sqrt[12]{2})^6 & = & 2^{\frac{6}{12}} & = & 1{,}414 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}414 & = & 311{,}13 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{dis}^1 \\
 & & (\sqrt[12]{2})^7 & = & 2^{\frac{7}{12}} & = & 1{,}498 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}498 & = & 329{,}63 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{e}^1 \\
 & & (\sqrt[12]{2})^8 & = & 2^{\frac{8}{12}} & = & 1{,}587 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}587 & = & 349{,}23 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{f}^1 \\
 & & (\sqrt[12]{2})^9 & = & 2^{\frac{9}{12}} & = & 1{,}682 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}682 & = & 367{,}00 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{fis}^1 \\
 & & (\sqrt[12]{2})^{10} & = & 2^{\frac{10}{12}} & = & 1{,}782 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}782 & = & 392{,}00 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{g}^1 \\
 & & (\sqrt[12]{2})^{11} & = & 2^{\frac{11}{12}} & = & 1{,}888 & => & 220\text{Hz} & \times & 1{,}888 & = & 415{,}30 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{gis}^1 \\
 & & (\sqrt[12]{2})^{12} & = & 2^{\frac{12}{12}} & = & 2 & => & 220\text{Hz} & \times & 2 & = & 440 \text{ Hz} & \widehat{=} \ \text{a}^1
\end{array}
$$

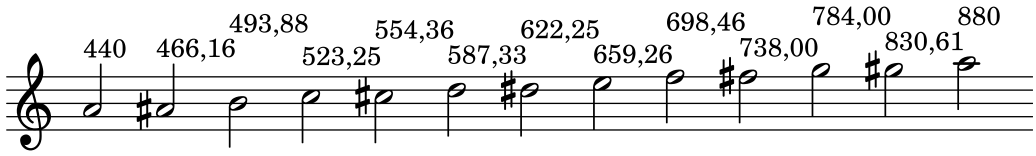
Nun die Noten mit den dazugehörigen mathematisch ausgerechneten Frequenzen – so wie wir die Stimmung von unserem *gleichstufigen System* gewohnt sind und auch in üblicher Weise praktizieren.

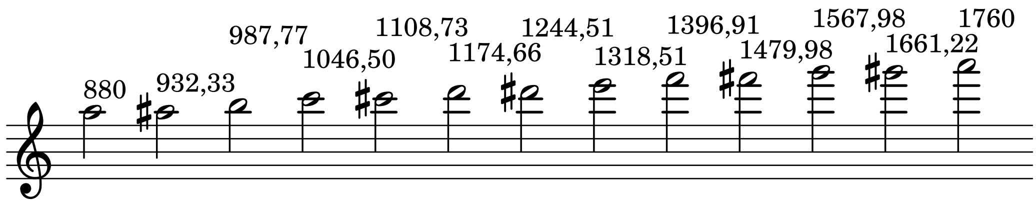


Die Frequenzen der weiteren Oktaven werden einfach durch Verdopplung oder Halbierung erzielt.









Die Obertonreihe

Wir brauchen die Frequenzen einer chromatischen Tonleiter, damit wir im Vergleich mit den *Frequenzen* der Obertonreihe auf die *Notation* der Obertonreihe schließen können.

TtNr	FTt	FcT	Abw	Note
1	55	55	0	A̲
2	110	110	0	A
3	165	164,81	+ 0,19	e
4	220	220	0	a
5	275	277,18	− 2,18	cis'
6	330	329,63	+ 0,37	e'
7	385	392,00	− 7	g'
8	440	440	0	a'
9	495	493,88	+ 1,12	h'
10	550	554,36	− 4,36	cis"
11	605	587,33	+ 17,67	d"
12	660	659,26	+ 0,74	e"
13	715	698,46	+ 16,54	fis"
14	770	784,00	− 14	g"
15	825	830,61	− 5,61	gis"
16	880	880	0	a"

Tt ...... Nummer des Teiltones
FTt ...... Frequenz des Teiltones in Hz
FcT ...... Frequenz der nächstliegenden chromatischen Tonhöhe
Abw ...... Abweichung des Teiltonfrequenz von der chromatischen Stimmung in Hz
Note ...... Resultierender Notenname des Obertons

Die Einteilung der Oktave in Cent

Die Einteilung der Oktave in 1200 Cent[1] oder den Halbton in 100 Cent ist hilfreich um bei unserer relativ groben Unterteilung der Oktave in zwölf glei-

[1] lat. centum = hundert

che Halbtonschritte zusätzliche Abweichungen angeben zu können, wenn diese notwendig erscheinen.
Wir können mithilfe einer mathematischen Formel von den Abweichungen der Frequenzen unserer gewonnenen Obertöne vom zwölfstufigen Tonsystem auf die Abweichung in Cent schließen.

$$c = 1200 \cdot log_2 \left(\frac{f^2}{f^1} \right)$$

c . . . gesuchtes Intervall in Cent-Angabe

Beispielsweise bei der Abweichung des 5. Teiltones über dem Kontra A mit 275 Hz anstatt der eigentlich notierten 277,18 Hz.

$$1200 \cdot log_2 \left(\frac{277,18}{275} \right) = 13,67$$

Das entspricht einer Abweichung von 14 cent von der Obertonberechnung gegenüber der gleichstufigen Einteilung der Oktave.

Interessant ist dabei die Abweichung wenn wir eine Oktave höher betrachten: Die abweichende Frequenz verdoppelt sich – das abweichende Intervall (centgenau) – bleibt gleich:

$$1200 \cdot log_2 \left(\frac{554,36}{550} \right) = 13,67$$

Noch eleganter schließen wir von den *Frequenzverhältnissen der Obertonreihe* auf die Abweichung in Cent.

$$1200 \cdot log_2 \left(\frac{3}{2} \right) = 701,96$$

Das entspricht 2 cent mehr als den notierten 700.

$$1200 \cdot log_2\left(\frac{5}{4}\right) = 386,31$$

Das entspricht 14 cent weniger als als den notierten 400.

$$1200 \cdot log_2\left(\frac{7}{4}\right) = 968,83$$

Das entspricht 31 cent weniger als den notierten1000.

$$1200 \cdot log_2\left(\frac{9}{8}\right) = 203,91$$

Das entspricht 4 cent mehr als als den notierten 200.

$$1200 \cdot log_2\left(\frac{11}{8}\right) = 551,32$$

Das entspricht 49 cent weniger als den notierten 600.

$$1200 \cdot log_2\left(\frac{13}{8}\right) = 840,53$$

Das entspricht 41 cent mehr als den notierten 800.

$$1200 \cdot log_2\left(\frac{15}{8}\right) = 1088,27$$

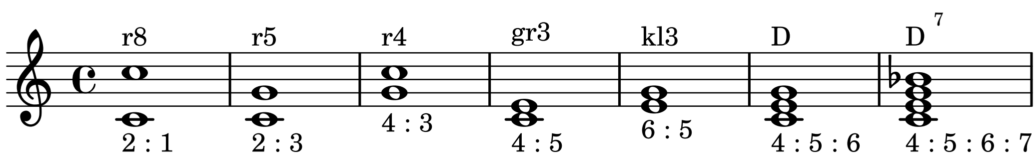
Das entspricht 12 cent weniger als den notierten 1100.

Mit diesen Berechnungen wird es möglich, die Tonhöhen einer Obertonreihe wesentlich genauer zu notieren.

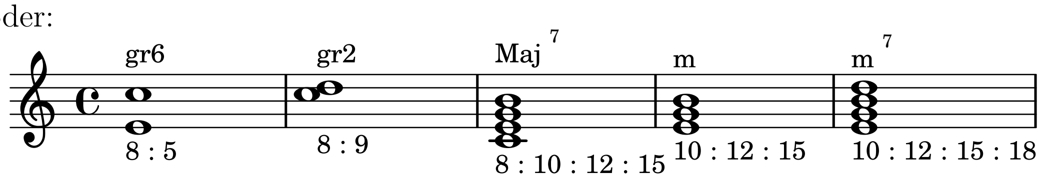
Wir betrachten hier – wie oft dargestellt – die ersten 16 Teiltöne über dem großen C:

Intervalle und Akkorde in der Obertonreihe

Aus der Obertonreihe schöpfen wir Intervalle und Akkorde mit ihren klanglich idealen Proportionen:



oder:



Die Obertonreihe birgt viele Geheimnisse:
Beispielsweise:

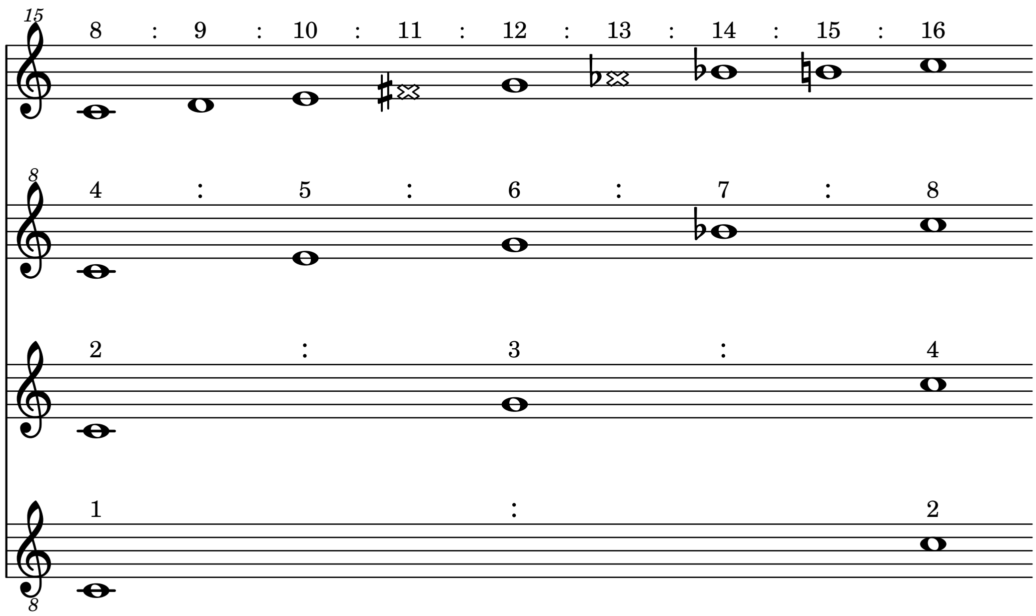
Das Prinzip der Selbstähnlichkeit

Über jedem Oberton finden wir eine eigene Obertonreihe:

1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 : 11 : 12 : 13 : 14 : 15 : 16 : 17 : 18 : 19 : 20 : 21 : 22 : 23 : 24 : 25 : 26 : 27 : 28 : 29 : 30 : 31 : 32...
1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 : 11 : 12 : 13 : 14 : 15 : 16...
1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 : 9 : 10 : ...
1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 7 : 8 ...
1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 : ...
1 : 2 : 3 : 4 : 5 : ...
1 : 2 : 3 : 4 ...
1 : 2 : 3 : 4 ...
1 : 2 : 3 : ...
1 : 2 : 3 : ...
1 : 2 : ...
1 : 2 : ...
1 : 2 : ...
1 : 2 : ...
1 : 2 : ...
1 : 2 ...
1 : ...

Der Aspekt der Teilung in der Obertonreihe

Jedes Intervall wird eine Oktave höher genau in der Frequenz-Mitte geteilt:



Das Spiegelbild: Die Untertonreihe

$$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7} : \frac{1}{8} : \frac{1}{9} : \frac{1}{10} : \frac{1}{11} : \frac{1}{12} : \frac{1}{13} : \frac{1}{14} : \frac{1}{15} : \frac{1}{16} :$$